

Séquence : 04

Document : TD01

Lycée Dorian

Renaud Costadoat

Françoise Puig



Avec Correction

Modélisation cinématique des liaisons



Référence	S04 - TD01
Compétences	B2-12: Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques. B2-13: Proposer un modèle cinématique paramétré à partir d'un système réel, d'une maquette numérique ou d'un B2-14: Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
Description	Mise en place de torseurs cinématiques et représentation par schéma cinématique
Système	Chaise de dentiste, Moteur à explosion

1 Moteur à explosion

1.1 Mise en situation



Le moteur à explosion est un type de moteur à combustion interne, il est principalement utilisé pour la propulsion des véhicules de transport (avion à hélice, automobile, moto, camion, bateau), ainsi que pour une multitude d'outils mobiles (tronçonneuse, tondeuse à gazon) ainsi que pour des installations fixes (groupe électrogène, pompe).

Le terme moteur à explosion, consacré par l'usage est impropre car il ne rend pas compte de tous les phénomènes se produisant dans ces moteurs, pour lesquels la dénomination à combustion interne est nettement plus adéquate.

Figure 1 – Moteur de Renault Laguna

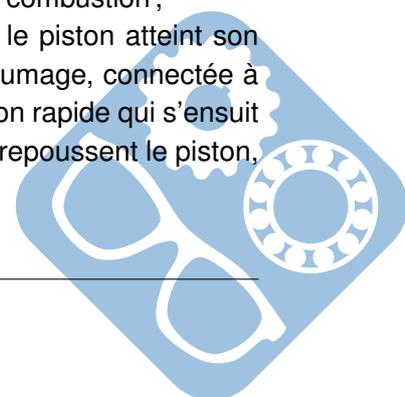
1.2 Présentation du système

Le cycle de fonctionnement se décompose de manière analytique en quatre temps ou phases. Le mouvement du piston est initié par la combustion (augmentation rapide de la température et donc de la pression des gaz) d'un mélange de carburant et d'air (comburant) qui a lieu durant le temps moteur. C'est le seul temps produisant de l'énergie ; les trois autres temps en consomment mais le rendent possible.

Le piston se déplace pendant le démarrage grâce à une source d'énergie externe (souvent un démarreur ou lanceur : un moteur électrique est couplé temporairement au vilebrequin) jusqu'à ce qu'au moins un temps moteur produise une force capable d'assurer les trois autres temps avant le prochain temps moteur. Le moteur fonctionne dès lors seul et produit un couple sur son arbre de sortie.

Voici une description des cycles successifs d'un moteur à quatre temps :

- admission d'un mélange air et de carburant vaporisé, présent dans le conduit d'admission, mélange préparé par divers composants (carburateur ou système d'injection indirecte) : ouverture de la soupape d'admission et descente du piston, ce dernier aspire ainsi ce mélange dans le cylindre à une pression de $-0,1$ à $-0,3$ bar ;
- compression du mélange : fermeture de la soupape d'admission, puis remontée du piston qui comprime le mélange jusqu'à 30 bars et 400 à 500 °C dans la chambre de combustion ;
- combustion et détente aux environs du point mort haut : moment auquel le piston atteint son point culminant et auquel la compression est au maximum ; la bougie d'allumage, connectée à un générateur d'électricité haute tension, produit une étincelle ; la combustion rapide qui s'ensuit constitue le temps moteur ; les gaz chauds à une pression de 40 à 60 bars repoussent le piston, initiant le mouvement ;



- échappement : ouverture de la soupape d'échappement et remontée du piston qui chasse les gaz brûlés détendus dans le collecteur d'échappement.
- Et un nouveau cycle commence en 1.

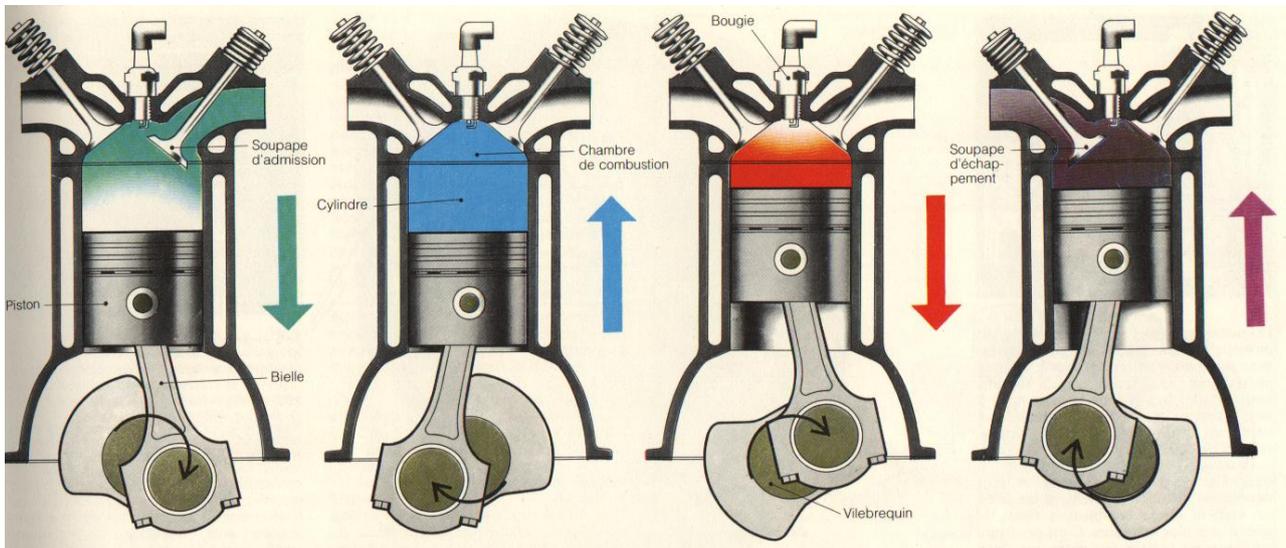


Figure 2 – Cycle de Beau de Rochas

Le **vilebrequin** (1) est en liaison avec le **carter** (0) au point A. La **bielle** (2) est en liaison avec le **vilebrequin** au point B. Le **piston** (3) est en liaison avec la bielle au point C.

Question 1 : Réaliser le graphe de liaison de ce mécanisme. Donner, pour chaque liaison, le type de liaison, le point d'application ainsi que le ou les axes nécessaires à sa description.

Question 2 : Représentez le mécanisme du moteur à l'aide d'un schéma cinématique.

Question 3 : Écrire le torseur de chacune de ces liaisons à son point d'application.

Question 4 : Paramétrer le schéma cinématique en y incluant les centres des liaisons ainsi que les repères des pièces.

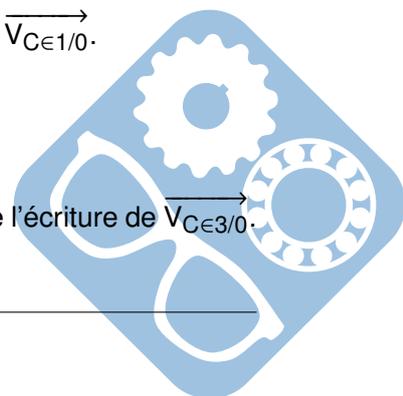
La loi de composition des vitesses nous donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 - \vec{V}_{C\in 3/0} &= \vec{V}_{C\in 3/2} + \vec{V}_{C\in 2/1} + \vec{V}_{C\in 1/0}, \\
 - \vec{\Omega}_{3/0} &= \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}.
 \end{aligned}$$

Question 5 : En utilisant le théorème de Varignon, déterminer $\vec{V}_{C\in 3/2}$, $\vec{V}_{C\in 2/1}$ et $\vec{V}_{C\in 1/0}$.

Question 6 : En utilisant la loi de composition des vitesses, déterminer $\vec{V}_{C\in 3/0}$.

Question 7 : En utilisant l'architecture du système, proposer une simplification de l'écriture de $\vec{V}_{C\in 3/0}$.



Question 8 : En déduire la norme de $\vec{V}_{C \in 3/0}$ en fonction des normes des vitesses de rotation $\vec{\Omega}_{3/0}$, $\vec{\Omega}_{3/2}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$, $\vec{\Omega}_{1/0}$.

2 La chaise de dentiste : Bac STI (GE) 2006

2.1 Mise en situation



La chirurgie dentaire et ses spécificités opératoires nécessitent l'installation du patient dans une position couchée particulière (voir illustration ci-dessous). La société AIREL a donc développé un fauteuil d'opération ergonomique, véritable automate comportant toutes les commandes et les fonctions dont le praticien doit disposer, quelle que soit sa spécialité et ses contraintes opératoires.

Figure 3 – Fauteuil dans un cabinet

2.2 Présentation du système

Le système de levée du fauteuil, qui va être l'objet de notre étude, est composé d'un vérin ainsi que d'un système pantographe.

Il permet de piloter la montée et la descente du fauteuil afin de placer le patient à une hauteur adéquate afin que le médecin pratique son intervention dans les meilleures conditions possibles.



Figure 4 – Système de levée



2.3 Descriptif de la cinématique

La figure 5, montre les pièces du système numérotées.

- La pièce 9 est en liaison pivot glissant avec la pièce 16, cette pièce est intégrée à la classe d'équivalence 1,
- La pièce 9' est en liaison pivot glissant avec la pièce/classe d'équivalence 5,
- La pièce 9' est en liaison pivot avec la pièce 3, la 9 avec la pièce/classe d'équivalence 4,
- Les pièces/classes d'équivalence 3 et 4 sont liées par une liaison pivot par l'intermédiaire des pièces 12 et 13, ces pièces sont intégrées à la classe d'équivalence 3,
- La pièce 8 est en liaison pivot avec la pièce 3 par l'intermédiaire des pièces 20, 21 et 27, ces pièces sont intégrées à la classe d'équivalence 3,
- Les pièces/classes d'équivalence 7 et 8 sont liées par une liaison hélicoïdale,
- La pièce 7 est liée au rotor du moteur dont le stator est numéroté 6. Cela signifie qu'il y a une liaison pivot entre ces pièces. La pièce 6 est elle est en liaison pivot par rapport à la pièce 1,
- La pièce 3 est en liaison pivot par rapport à la pièce 2 par l'intermédiaire de la pièce 22, ces pièces sont intégrées à la classe d'équivalence 2,
- La pièce 4 est en liaison pivot par rapport à la pièce 5. Les pièces 1 et 2 sont solidaires.

Données géométriques :

- $\vec{AB} = l(t) \cdot \vec{x}_6$,
- $\vec{AD} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y}$,
- $\vec{DK} = L \cdot \vec{x}_3$.

Question 1 : Réaliser le graphe de liaison de ce mécanisme. Donner, pour chaque liaison, le type de liaison, le point d'application ainsi que le ou les axes nécessaires à sa description.

Question 2 : Représentez le mécanisme d'élévation du siège à l'aide d'un schéma cinématique.

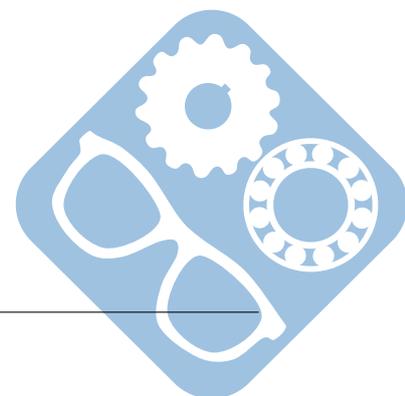
Question 3 : Écrire le torseur de chacune de ces liaisons à son point d'application.

Le système présente la chaîne de fermeture cinématique suivante :

$$\{V_{3/1}\} = \{V_{3/8}\} + \{V_{8/7}\} + \{V_{7/6}\} + \{V_{6/1}\}$$

Question 4 : En déduire ω_{31} en fonction de ω_{76} .

Question 5 : Déterminer la vitesse de montée du siège V_{51} en fonction de θ_3 et de ω_{31} . Montrer qu'il est alors possible de connaître la vitesse de montée du siège en fonction de la vitesse de rotation du moteur.



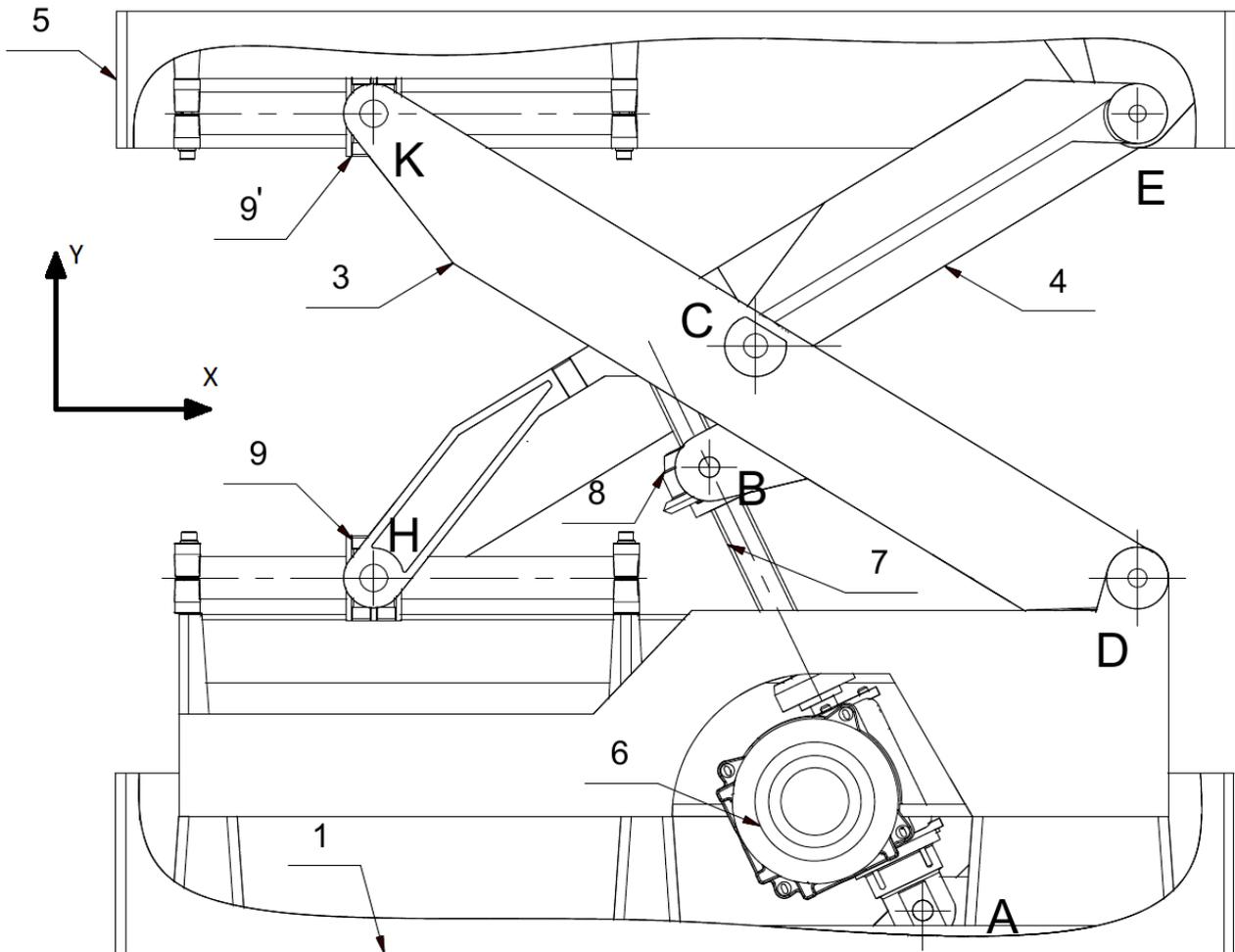
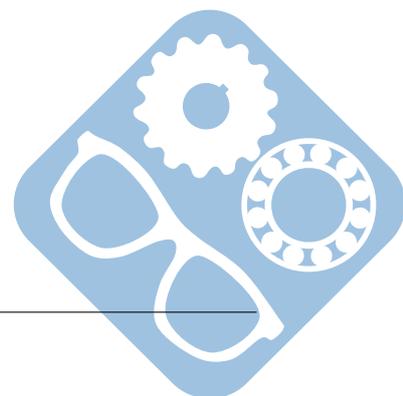


Figure 5 – Système de levée



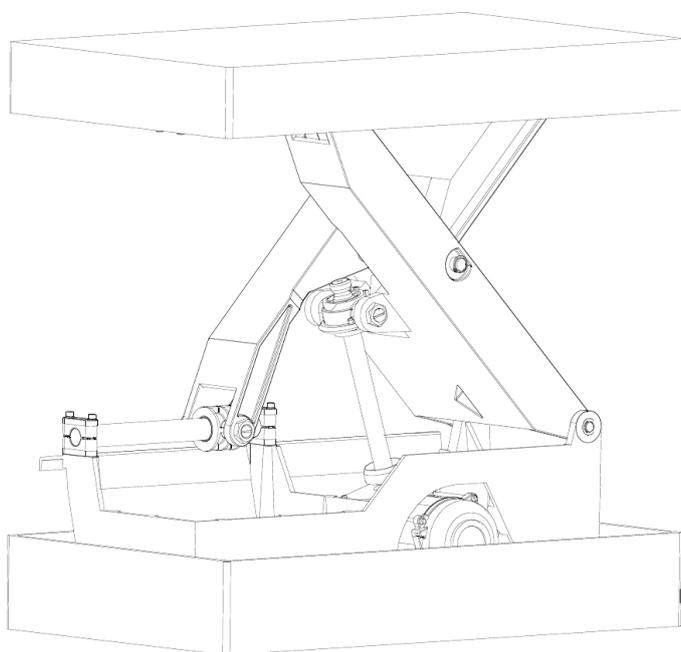


Figure 6 – Position haute

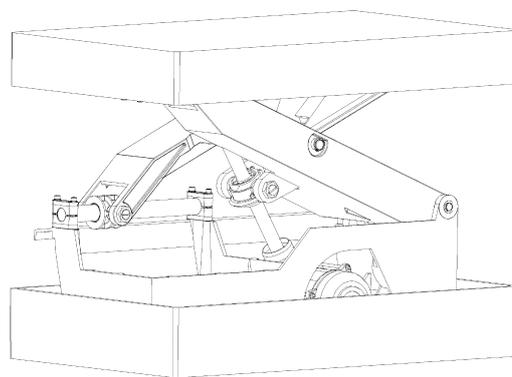


Figure 7 – Position intermédiaire

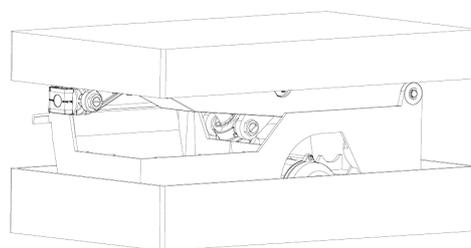
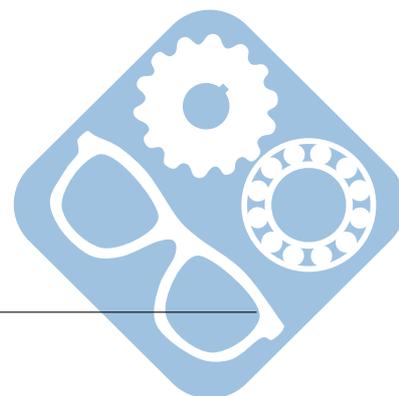


Figure 8 – Position basse



3 Correction

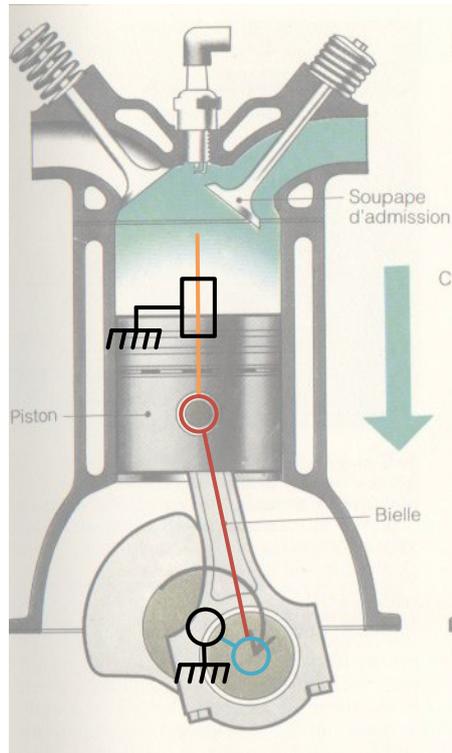
3.1 Moteur à explosion

Question 1 : Graphe de liaison

- 0 : Bâti,
- 1 : vilebrequin,
- 2 : Bielle,
- 3 : Piston.

Graphe des liaisons

Question 2 : Schéma cinématique



Question 3 :

$$\{V_{A \in 1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R} \quad \{V_{B \in 2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R} \quad \{V_{C \in 3/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R}$$

$$\{V_{C \in 3/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{30} & \omega_{30} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R}$$

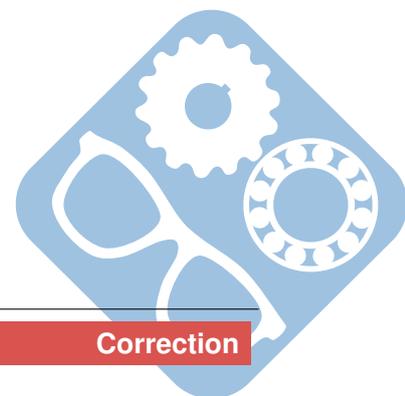
Question 4 : $\vec{AB} = a \cdot \vec{x}_1$, $\vec{BC} = b \cdot \vec{x}_2$.

Avec $\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos(\theta_1) \cdot \vec{x} + \sin(\theta_1) \cdot \vec{y} \\ \vec{y}_1 = -\sin(\theta_1) \cdot \vec{x} + \cos(\theta_1) \cdot \vec{y} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{x}_2 = \cos(\theta_2) \cdot \vec{x} + \sin(\theta_2) \cdot \vec{y} \\ \vec{y}_2 = -\sin(\theta_2) \cdot \vec{x} + \cos(\theta_2) \cdot \vec{y} \end{cases}$

Question 5 : $\vec{V}_{C \in 3/2} = \vec{0}$

$$\vec{V}_{C \in 2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{CB} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -b \cdot \vec{x}_2 \wedge \omega_{21} \cdot \vec{z} = b \cdot \omega_{21} \cdot \vec{y}_2$$

$$\vec{V}_{C \in 1/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} + \vec{CA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -(b \cdot \vec{x}_2 + a \cdot \vec{x}_1) \wedge \omega_{10} \cdot \vec{z} = \omega_{10} \cdot (b \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \vec{y}_1)$$



Question 6 : $\vec{V}_{C \in 3/0} = a \cdot \omega_{10} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot (\omega_{21} + \omega_{10}) \cdot \vec{y}_2$

Question 7 : $\vec{V}_{C \in 3/0} \cdot \vec{x} = 0$

Question 8 :

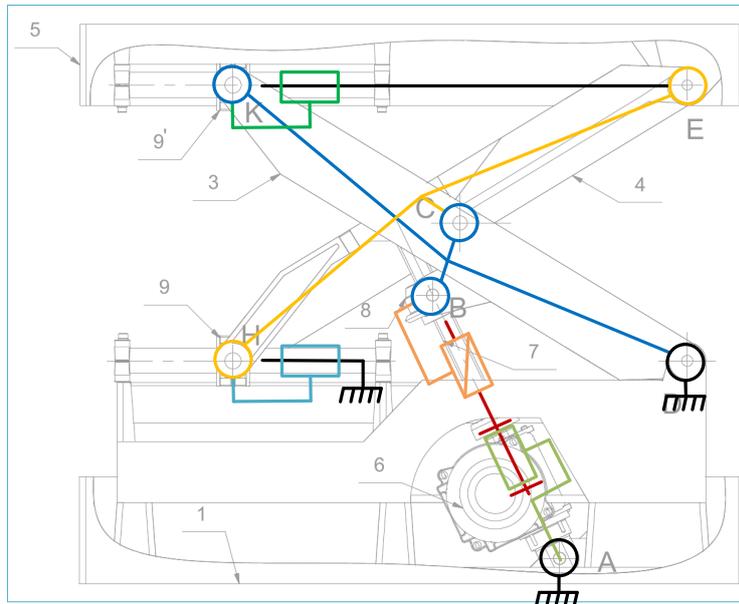
- $(a \cdot \omega_{10} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot (\omega_{21} + \omega_{10}) \cdot \vec{y}_2) \cdot \vec{x} = 0,$
- $(a \cdot \omega_{10} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot (\omega_{21} + \omega_{10}) \cdot \vec{y}_2) \cdot \vec{y} = \|\vec{V}_{C \in 3/0}\|.$

Un fichier python permettant de tracer la vitesse du piston est disponible ici : <https://github.com/Costadoat/S04/raw/master/TD02/piston.py>

3.2 Chaise de dentiste

Question 1 : Graphe de liaison

Question 2 : Schéma cinématique



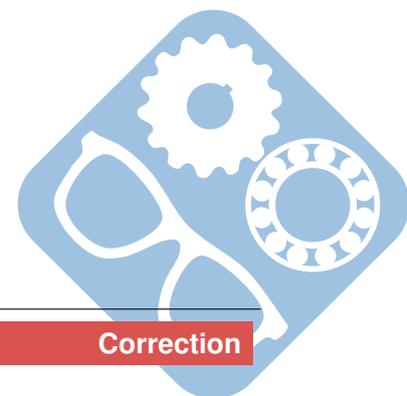
Question 3 :

$$\{V_{9/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{91} & V_{91} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{H,R} \quad \{V_{4/9}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{49} & 0 \end{Bmatrix}_{H,R} \quad \{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R}$$

$$\{V_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{43} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R} \quad \{V_{9'/3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{9'/3} & 0 \end{Bmatrix}_{K,R} \quad \{V_{5/9'}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{59'} & V_{59'} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{K,R} \quad \{V_{6/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$$

$$\{V_{8/7}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{87} & V_{87} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_6}, \text{ avec } V_{87} = \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \omega_{87}$$

$$\{V_{7/6}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{76} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_6} \quad \{V_{3/8}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{38} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R}$$



Question 4 : $\{V_{3/1}\} = \{V_{3/8}\} + \{V_{8/7}\} + \{V_{7/6}\} + \{V_{6/1}\}$

Déplacement des torseurs au point A.

$$\{V_{3/8}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{38} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -l(t) \cdot \omega_{38} \\ \omega_{38} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_6}$$

$$\{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R} = \begin{Bmatrix} 0 & b \cdot \omega_{31} \\ 0 & -a \cdot \omega_{31} \\ \omega_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & b \cdot \omega_{31} \\ 0 & -a \cdot \omega_{31} \\ \omega_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -l(t) \cdot \omega_{38} \\ \omega_{38} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_6} + \begin{Bmatrix} \omega_{87} & V_{87} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_6} + \begin{Bmatrix} \omega_{76} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_6} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$$

$$\omega_{31} \cdot \vec{z} = \omega_{38} \cdot \vec{z}_6 + \omega_{87} \cdot \vec{x}_6 + \omega_{76} \cdot \vec{x}_6 + \omega_{61} \cdot \vec{z} \quad (1)$$

$$b \cdot \omega_{31} \cdot \vec{x} - a \cdot \omega_{31} \cdot \vec{y} = -l(t) \cdot \omega_{38} \cdot \vec{y}_6 + V_{87} \cdot \vec{x}_6 \quad (2)$$

En sachant que $\vec{z} = \vec{z}_6$, on obtient en projetant **1** sur \vec{x}_6 , puis sur $\vec{z} = \vec{z}_6$:

$$\omega_{31} = \omega_{38} + \omega_{61} \quad (3)$$

$$0 = \omega_{87} + \omega_{76} \quad (4)$$

En projetant **2** sur \vec{x} , puis sur \vec{y} après avoir fait un changement de repère, on obtient :

$$b \cdot \omega_{31} = l(t) \cdot \sin\theta_6 \cdot \omega_{38} + \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{87} \cdot \cos\theta_6 \quad (5)$$

$$-a \cdot \omega_{31} = -l(t) \cdot \cos\theta_6 \cdot \omega_{38} + \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{87} \cdot \sin\theta_6 \quad (6)$$

En écrivant isolant les ω_{38} et en divisant par , on obtient :

$$\frac{\sin\theta_6}{\cos\theta_6} = \frac{b \cdot \omega_{31} - \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{87} \cdot \cos\theta_6}{a \cdot \omega_{31} + \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{87} \cdot \sin\theta_6} \quad (7)$$

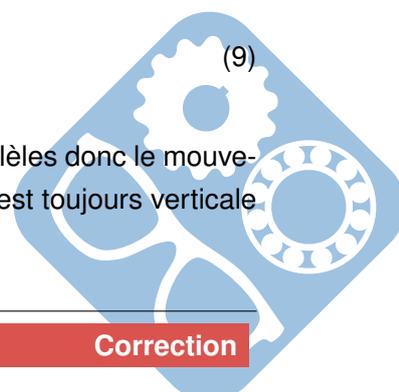
Soit :

$$b \cdot \cos\theta_6 \cdot \omega_{31} - \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{87} \cdot \cos^2\theta_6 = a \cdot \sin\theta_6 \cdot \omega_{31} + \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{87} \cdot \sin^2\theta_6 \quad (8)$$

Donc :

$$\omega_{31} = \frac{\frac{p}{2 \cdot \pi}}{a \cdot \sin\theta_6 - b \cdot \cos\theta_6} \cdot \omega_{76} \quad (9)$$

Question 5 : HDEK est un rectangle donc les côtés HD et KE sont toujours parallèles donc le mouvement de 5/1 est une translation, donc : $\vec{V}_{E \in 5/1} = \vec{V}_{K \in 5/1}$, de plus la direction (DE) est toujours verticale donc cette translation est verticale, donc $\vec{V}_{E \in 5/1} = V_{51} \cdot \vec{y}$.



Correction

$\vec{V}_{K \in 5/1} = \vec{V}_{K \in 5/9'} + \vec{V}_{K \in 9'/3} + \vec{V}_{K \in 3/1}$, or la liaison entre 9' et 3 est une pivot d'axe (C, \vec{z}) , donc $\vec{V}_{K \in 9'/3} = \vec{0}$.

La liaison 5/9' est une pivot glissant d'axe (K, \vec{x}) , donc $\vec{V}_{K \in 5/9'} = V_{59'} \cdot \vec{x}$.

Ainsi, $\vec{V}_{K \in 5/1} \cdot \vec{y} = V_{51} = \vec{V}_{K \in 3/1} \cdot \vec{y}$

$$V_{51} = (\vec{V}_{D \in 3/1} + \vec{KD} \wedge \vec{\omega}_{31}) \cdot \vec{y} = (\vec{KD} \wedge \vec{\omega}_{31}) \cdot \vec{y}$$

$$V_{51} = (-L \cdot \vec{x}_3 \wedge \omega_{31} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{y}$$

$$V_{51} = L \cdot \omega_{31} y_3 \cdot y$$

$$V_{51} = L \cdot \cos \theta_3 \cdot \omega_{31}$$

